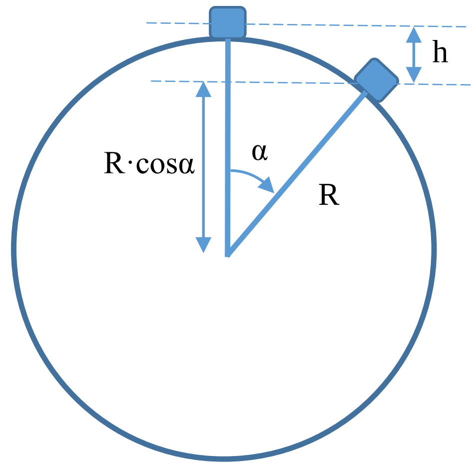
Перша задача

Невелике тіло зісковзує без тертя з вершини сфери радіусу R.

а) На якій висоті тіло відірветься від сфери?

б) Якщо врахувати силу тертя, то збільшиться чи зменшиться ця висота? Відповідь обґрунтувати.



Розв'язок:

а) Оскільки тертя не враховується, то повна енергія тіла зберігається:

$E_1 = mgh = E_2 = mv^2/2.$

За початок обліку потенціальної енергії обрана точка де тіло відривається від поверхні. Підставивши вираз для $h = R(1 – cosα)$, маємо:

$mgR(1 – cosα) = mv^2/2.$

Друге рівняння отримаємо з рівності сили реакції опори нулю на момент відриву. В цю мить лише сила тяжіння створює доцентрове прискорення:

$a_n = mv^2/R = mg·cosα.$

Як завжди у задачах про рух тіл в полі тяжіння маси скорочуються, звідки:

$v^2 = Rg·cosα = 2gR(1 – cosα)$, або $cosα = 2/3$. Це і є відповідь: $h = R/3$.

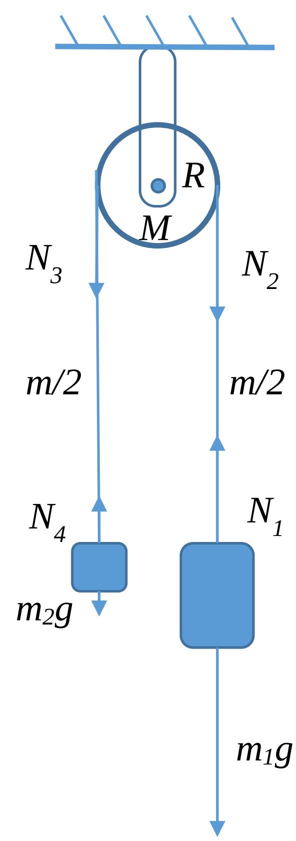
б) Зрозуміло, що врахування сили тертя зменшує швидкість руху тіла, а тому відрив від поверхні відбудеться пізніше, тобто тіло переміститься по поверхні нижче, ніж без тертя. Але такі висновки передбачають дуже мале тертя, інакше для того, щоб тіло почало скочуватися, його треба перемістить у точку, для якої $tgα = μ$ і задача вже не може бути поставлена так як в умові.

Друга задача

Два тіла $\boldsymbol{m_1}$ *и* $\boldsymbol{m_2}$ *закріплені на двох кінцях нитки. Нитка перекинута через нерухомий блок.*

а) З яким прискоренням рухаються тіла, якщо масою блока та нитки знехтувати?

б) Нехай блок має масу $\boldsymbol{M}$ *і радіус* $\boldsymbol{R}$*, а нитка має масу* $\boldsymbol{m}$ *і довжину набагато більшу за радіус блока. З яким прискоренням рухаються тіла у момент, коли праворуч та ліворуч довжини нитки однакові?*



Розв'язок:

а) Якщо не враховувати масу блока та нитки, то для кожного тіла, що має масу, записуємо рівняння II закону Ньютона:

$m_1a = m_1g – N$

$m_2a = N – m_2g$

Де N – сила натягу нитки, яка скрізь є однаковою за величиною внаслідок невагомості блоку та ниток.

або $(m_1 + m_2)a = (m_1 – m_2)g$ звідки $a = g(m_1 – m_2)/(m_1 + m_2).$

б) Якщо враховувати масу блока та нитки, то треба додати рівняння II закону Ньютона для ниток та блоку.

$m_1a = m_1g – N_1$

$ma/2 = N_1 - N_2$
$ma/2 = N_3 - N_4$
$m_2a = N_4 - m_2g$
$I\varepsilon = (N_2 - N_3)R$
Якщо блок вважати суцільним диском, то останнє рівняння отримує вигляд:
$MR^2\varepsilon/2 = MRa/2 = (N_2 - N_3)R.$
Позбавляючись від сил натягу нитки ($N_1 > N_2 > N_3 > N_4$), отримаємо:
$ma/2 = m_1g - m_1a - N_2 \Rightarrow N_2 = m_1g - m_1a - ma/2$
$ma/2 = N_3 - m_2a - m_2g \Rightarrow N_3 = ma/2 + m_2a + m_2g$
$Ma/2 = N_2 - N_3 = m_1g - m_1a - ma/2 - ma/2 - m_2a - m_2g$
Остаточно: $(M/2 + m_1 + m + m_2)a = (m_1 - m_2)g$

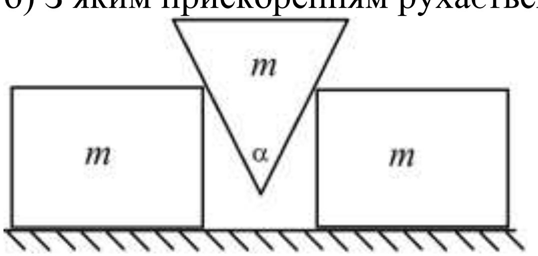
Останнє рівняння має простий зміст – «загальна маса прискорюється різницею сил тяжіння двох тіл». Звідки – відповідь, яка принципово не відрізняється від попередньої з фізичним змістом:

$$a = g(m_1 - m_2)/(M/2 + m_1 + m + m_2)$$

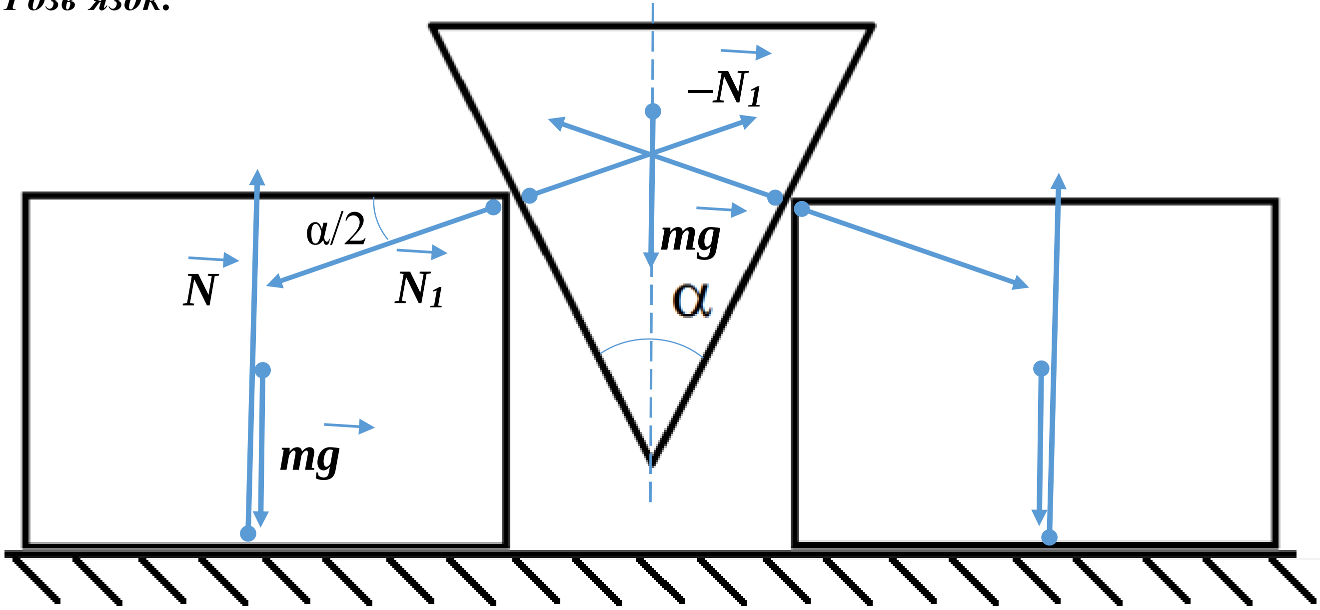
Третя задача

Два однакових бруска стоять на гладкій горизонтальній поверхні на невеликій відстані один від одного. Згори на них, гострим кінцем донизу ставлять клин с кутом $\boldsymbol{\alpha}$. Клин опускається під дією сили тяжіння, розсуваючи бруски. Маси всіх трьох тіл однакові $\boldsymbol{m}$.

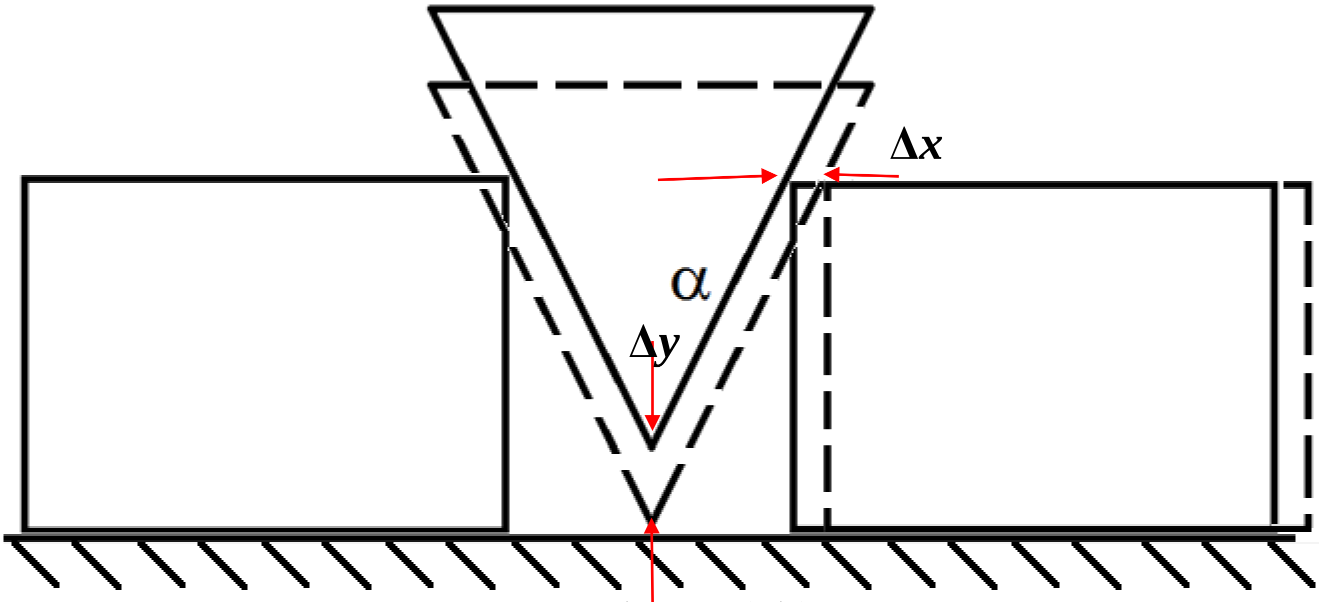
а) З яким прискоренням рухаються бруски (роз'їжджаючись один від одного)?
б) З яким прискоренням рухається клин?



Розв'язок:



На малюнку показано розподілення сил, які діють на тіла задані у задачі.
В силу умов зв'язку руху тіл, тіла, що стоять на поверхні прискорюються горизонтальними складовими результуючих сил, а клин – вертикальною складовою. Всі інші складові компенсуються. Вертикальне прискорення клину та горизонтальне прискорення тіл зв'язані кінематичною в'яззю (див рис.)



$\Delta x/\Delta y = tg(\alpha/2)$

Так само відносяться і прискорення $a_x/a_y = tg(\alpha/2)$.
Таким чином маємо:

- В вертикальному напрямку (для клину)
  $ma_y = mg - 2N_1 \cdot sin(\alpha/2)$
- В горизонтальному напрямку (для тіл)
  $ma_x = N_1 \cdot cos(\alpha/2)$

Разом: $ma_y = mg - 2\, ma_x \cdot sin(\alpha/2)/cos(\alpha/2) = mg - 2\, ma_y \cdot tg^2(\alpha/2)$
Відповідь: прискорення ружу клину: $a_y = g/(1+2\, tg^2(\alpha/2))$ та тіл: $a_x = a_y tg(\alpha/2)$
Зауваження: Вказаний результат має добре узгодження у граничному випадку: Нехай кут $\alpha \to 0$ (тонка пластина), тоді $tg(\alpha/2) \to 0$ і $a_y \to g$ – тобто вільне падіння пластини, $a_x \to 0$ тобто тіла не рухаються.