Довідковий матеріал з математики

Для успішного засвоєння матеріалу курсу фізики, особливо для розв'язання задач, необхідно вільно володіти математичною мовою, здійснювати алгебраїчні та тригонометричні перетворення, знати ознаки рівності та подібності геометричних фігур, їх площі та об'єми. Всі ці знання та вміння – математична культура – набуваються на уроках математики. В цьому розділі наведені тільки ті математичні відомості та правила розрахунків, які особливо необхідні для розв'язання фізичних задач. Цей матеріал допоможе провести ефективне повторення, виділити те, що необхідно знати в першу чергу. В то же час це не підручник з математики, тому якщо зустрінеться щось незнайоме - зверніться до математичної літератури.

1. Перетворення алгебраїчних виразів

Після запису даних з умови задачі до "**Дано:**" (див. рис.), і визначення теми, до якої відноситься задача, записуються рівняння, що визначаються відповідними фізичними законами. Ці рівняння містять як відомі фізичні величини, так и ті, які необхідно визначити.

Дано: (Дані з умови задачі)	**Розв'язання:**
Шукана величина — **?**	**Відповідь:**

Щоб перейти до математичного етапу, необхідно записати стільки незалежних рівнянь, скільки є невідомих величин. Якщо це не вдасться, тоді, моливо, декілька невідомих, що входять в записані рівняння, можна згрупувати так, щоб вони склали одну величину, яка у подальшому може бути виключена. Зменшення числа невідомих в системі виконується так: визначається одна з невідомих величин через інші в одному рівняння та отриманий вираз підставляється в інші. Так систему рівнянь можна привести до одного рівняння, що містить одну невідому, яку необхідно знайти за умовою задачі. Описані перетворення передбачають вміння застосовувати наступні правила.

Далі повторення матеріал: Арифметичні дії для попередніх контрольних робіт.

Арифметичні та алгебраїчні дії у рівняннях та математичних рівняннях

Перетворення арифметичних та алгебраїчних виразів

В рівняннях дії виконуються у наступному порядку:

- знаходження виразів у дужках;
- обчислення тригонометричних, показникових та інших функцій;
- піднесення до ступеня;
- множення та ділення;
- додавання та віднімання.

Для знаходження невідомої з рівнянням необхідно провести такі перетворення, щоб невідома залишилася єдиною з однієї з сторін рівняння. Для послідовного перетворення – спрощення рівняння, по-перше, необхідно визначити, яка дія повинна виконуватися останньою з кожної зі сторін рівняння. по-друге, переносити ті вирази, в яких відсутня невідома в протилежну сторону рівності за наступними правилами:

1. Якщо остання дія додавання або віднімання, то вираз переноситься на протилежну сторону рівності зі зміненням знаку

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$$

Можна отримати: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b}$ або $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}$ та інші. На строгій математичній мові ця дія звучить так: "Якщо до правої і лівої частини рівності додати або відняти одинакові вирази, то рівність не порушиться".

2. Якщо остання дія множення або ділення, то вираз переноситься з чисельника в знаменник на протилежну сторону рівності та навпаки

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}.$$

Можна отримати: $a = \dfrac{b \cdot d}{c}$ або $d = \dfrac{a \cdot c}{b}$ та інші. На строгій математичній мові ця дія звучить так: "Якщо праву та ліву частини рівності помножити або розділити на (не рівні нулю) одинакові вирази, то рівність не порушиться".

Якщо невідомі входять до декількох членів рівняння, то треба вміти приводити подібні, групуючи доданки, які містять одинакові ступені невідомої величини. При цьому необхідно вміти виконувати дії з дробями:

3. При додаванні та відніманні дробових виразів їх треба привести до загального знаменнику

$$\frac{a}{b} \pm \frac{A}{B} = \frac{a \cdot B}{b \cdot B} \pm \frac{A \cdot b}{B \cdot b} = \frac{a \cdot B \pm A \cdot b}{b \cdot B}.$$

4. При множенні дробових виразів на число або дріб перемножуються як вирази, що стоять в чисельнику, так і в знаменнику

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{1} = \frac{a \cdot n}{b}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{A}{B} = \frac{a \cdot A}{b \cdot B}.$$

5. При діленні дробових виразів на число або дріб, дріб на яку ділять "перевертається" та виконується операція множення дробових виразів

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{b \cdot n}, \qquad \frac{a}{b} : \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{B}{A} = \frac{a \cdot B}{b \cdot A}.$$

Збільшення та зменшення величин

У фізичних задачах правильність виконання операцій з фізичними величинами можна проводити за допомогою перевірки розмірності (одиниць вимірювання). Необхідно пам'ятати, що **додавати та віднімати можна лише величини з однаковими одиницями вимірювання**. Показник ступеню, а також вирази під знаком синуса або іншої тригонометричної функції повинні бути безрозмірними. Одиниці вимірювання в протилежних сторонах рівнянь повинні співпадати.

Часто у задачах величини, наприклад a_1, можуть зазнавати змінення:

- збільшення (зменшення) на: $\Delta a = a_2 - a_1$ $(\Delta a = a_1 - a_2)$;
- збільшення (зменшення) в n разів: $n = \dfrac{a_2}{a_1}$ $\left(n = \dfrac{a_1}{a_2}\right)$;
- збільшення (зменшення) на k-ю частину: $k = \dfrac{a_1}{\Delta a} = \dfrac{a_1}{a_2 - a_1}$; $\left(k = \dfrac{a_1}{\Delta a} = \dfrac{a_1}{a_1 - a_2}\right)$;
- збільшення (зменшення) на: $n\% = \dfrac{\Delta a}{a_1} \cdot 100\% = \dfrac{a_2 - a_1}{a_1} \cdot 100\%$; $\left(n\% = \dfrac{a_1 - a_2}{a_1} \cdot 100\%\right)$.

Десяткові показники

Якщо фізичні величини мають дуже великі або дуже малі чисельні значення, використовуються скорочені записи за допомогою десяткових показників:

* $1\underbrace{00\ldots0}_{n} = 10^n$ - при множенні на таке число десяткова кома зміщується на n знаків вправо (n - додаткових порядків);

* $0,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 = 10^{-n}$ - при множенні на таке число десяткова кома зміщується на n знаків вліво (на n порядків менше).

Очевидно, що: $10^0=1$, $10^1=10$, $10^{-1}=0{,}1$.

При операціях з такими числами притримуються наступних правил:

* При множені показники додаються

$$\left(a\cdot 10^{b}\right)\cdot\left(c\cdot 10^{d}\right)=a\cdot c\cdot 10^{b+d}\ ;\qquad \text{наприклад: } 2\cdot 10^{3}\cdot 3\cdot 10^{5}=6\cdot 10^{8};$$

при діленні - віднімаються

$$\frac{a\cdot 10^{b}}{c\cdot 10^{d}}=\left(a\cdot 10^{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\cdot 10^{-d}\right)=\frac{a}{c}\cdot 10^{b-d}\ ;\qquad \text{наприклад: } \frac{3\cdot 10^{5}}{2\cdot 10^{3}}=1{,}5\cdot 10^{2}.$$

* При піднесенні до степеню показники перемножуються

$$\left(a\cdot 10^{b}\right)^{c}=a^{c}\cdot 10^{b\cdot c};\qquad \text{наприклад: } \left(3\cdot 10^{5}\right)^{2}=9\cdot 10^{10}\ ;$$

при добуванні кореня - діляться

$$\sqrt[n]{a\cdot 10^{b}}=\left(a\cdot 10^{b}\right)^{1/n}=a^{1/n}\cdot 10^{b/n};\quad \text{наприклад: } \sqrt[2]{9\cdot 10^{10}}=3\cdot 10^{5}.$$

- При додаванні та відніманні виносяться за дужки множники з однаковими показниками $a\cdot 10^{b}\pm c\cdot 10^{d}=10^{b}\cdot\left(a\pm c\cdot 10^{d-b}\right)$; (звичайно краще, якщо обрати d > b)

наприклад: $2\cdot 10^{3}+3\cdot 10^{5}=\left(2+3\cdot 10^{2}\right)\cdot 10^{3}=302\cdot 10^{3}=3{,}02\cdot 10^{5}$;

Скрізь вище ***a*, *b*, *c*, *d*** – числа або алгебраїчні вирази.

Якщо рівняння містить більш високу степені невідомої, ніж перша, то треба видобути корінь, пам'ятаючи, що при цьому можливе змінення знаку ($y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$). Для розв'язання рівнянь, що містять різні степені невідомої необхідно вміти знаходити корені квадратного чи біквадратного рівняння

$$ax^{2}+bx+c=0;\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a};\ \text{якщо } a=1;\ \ x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^{2}-c};$$

$$ay^{4}+by^{2}+c=0;\quad y_{1,2}^{2}=x_{1,2}>0.$$

Рівняння більш високого порядку зустрічаються в шкільних задачах з фізики тільки якщо вони мають спеціальний вид, що дозволяє представити їх через квадратні чи лінійні. Для таких перетворень корисні формули бінома

1	$x+y$
$\underbrace{1+2}_{\Downarrow}$ 1	$(x+y)^{2}=x^{2}+2xy+y^{2}$
$\underbrace{1+3}_{\Downarrow}$ 3 1	$(x+y)^{3}=x^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}+y^{3}$
1 4 6 4 1	$(x+y)^{4}=x^{4}+4x^{3}y+6x^{2}y^{2}+4xy^{3}+y^{4}$
. . . .	. . . .
1 n . . . . n 1	$(x+y)^{n}=x^{n}+nx^{n-1}y+\cdots+nxy^{n-1}+y^{n}$

Та найпростіші розкладення $\left(x^{2}-y^{2}\right)=(x-y)(x+y)$;
$\left(x^{3}\pm y^{3}\right)=(x\pm y)\left(x^{2}\mp xy+y^{2}\right)$.